<u>ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ</u>

ΚΑΜΠΥΛΕΣ Ι

1. Δίνεται η καμπύλη

$$c(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(i) Εξετάστε αν είναι κανονική. Βρείτε τη συνάρτηση μήκους τόξου με αφετηρία $t_0 = 0$.

(ii) Βρείτε αναπαραμέτρηση με παράμετρο το μήκος τόξου.

(iii) Υπολογίστε τη καμπυλότητα της ως συνάρτηση του t και του μήκους τόξου.

(iv) Υπολογίστε το πλαίσιο Frenet συναρτήσει του t και του μήκους τόξου.

(v) Υπάρχει εφαπτομένη ή κάθετη ευθεία της c η οποία να διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$;

2. Δίνεται η καμπύλη

$$c(t) = (t, a\cosh(\frac{t}{a} + b)), \quad t \in \mathbb{R},$$

όπου $a \neq 0$ και b είναι πραγματικοί αριθμοί. Να υπολογιστεί η καμπυλότητα της ως συνάρτηση του μήκους τόξου.

3. Να βρεθεί η καμπύλη $c(s), s \in \mathbb{R}$, του $\mathbb{R}^2$ με παράμετρο το μήκος τόξου, καμπυλότητα $k(s) = -5$ τέτοια ώστε

$$c(0) = (1,1), \quad c'(0) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

4. Να βρεθούν όλες οι καμπύλες $c(s), s \in \mathbb{R}$ του $\mathbb{R}^2$ με παράμετρο το μήκος τόξου και μοναδιαίο κάθετο

$$\vec{n}(s) = (-\sin s, \cos s).$$

5. Αποδείξτε ότι οι μόνες καμπύλες του $\mathbb{R}^2$ που έχουν την ιδιότητα οι κάθετες ευθείες να διέρχονται από σταθερό σημείο p_0 είναι τμήματα κύκλου κέντρου p_0.

6. Αποδείξτε ότι οι μόνες καμπύλες του $\mathbb{R}^2$ που έχουν την ιδιότητα οι εφαπτόμενες ευθείες να απέχουν σταθερή απόσταση από σταθερό σημείο είναι τμήματα ευθείας ή κύκλου.

7. Δίνεται η καμπύλη

$$c(t) = (R\cos^3 t, R\sin^3 t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

όπου R είναι θετικός πραγματικός αριθμός.

(i) Να εξεταστεί ως προς τη κανονικότητα.

(ii) Να υπολογιστεί το μήκους τόξου με αφετηρία $t_0 = 0$.

(iii) Να υπολογιστεί το μήκος της.

(iv) Βρείτε αναπαραμέτρηση της με παράμετρο το μήκος τόξου.

8. Έστω $c(s), s \in I \subset \mathbb{R}$ καμπύλη του $\mathbb{R}^2$ με παράμετρο το μήκος τόξου και καμπυλότητα $k(s) \neq 0$ για κάθε $s \in I$. Θεωρούμε τη καμπύλη

$$\tilde{c}(s) = c(s) + \frac{1}{k(s)}\vec{n}(s),$$

όπου $\vec{n}(s)$ είναι το μοναδιαίο κάθετο της c.

(i) Να εξεταστεί η $\tilde{c}$ ως προς τη κανονικότητα.

(ii) Αν η $\tilde{c}$ είναι κανονική να βρεθεί το πλαίσιο Frenet καθώς και η καμπυλότητα της.

9. Έστω $c(s), s \in [a, b]$ καμπύλη του $\mathbb{R}^2$ με παράμετρο το μήκος τόξου. Θεωρούμε τη καμπύλη

$$c_\sigma(s) = c(s) + \sigma\vec{n}(s),$$

όπου $\vec{n}(s)$ είναι το μοναδιαίο κάθετο της c.

(i) Να αποδείξτε ότι για σ αρκούντως μικρό η c_σ είναι κανονική. Βρείτε το πλαίσιο Frenet της c_σ.

(ii) Να αποδείξτε ότι η καμπυλότητα k_σ της c_σ είναι

$$k_\sigma(s) = \frac{k(s)}{1-\sigma k(s)},$$

όπου $k(s)$ είναι η καμπυλότητα της c.

10. Δίνεται καμπύλη $c : (a,b) \to \mathbb{R}^2$, με παράμετρο το μήκος τόξου s, για την οποία υπάρχει $s_0 \in (a,b)$ τέτοιο ώστε η απόσταση $d(c(s),O)$ του τυχόντος σημείου της καμπύλης από την αρχή O του $\mathbb{R}^2$ λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της για $s = s_0$. Αποδείξτε ότι η καμπυλότητα $k(s)$ της καμπύλης c στο s_0 πληροί $|k(s_0)| \geq k_0$, όπου $k_0 > 0$ είναι η καμπυλότητα του κύκλου κέντρου O που διέρχεται από το σημείο $c(s_0)$.